



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

LIZANDRA MEIRE MOREIRA SANTOS

**CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO UM CONTROLADOR
PID**

PAU DOS FERROS

2020

LIZANDRA MEIRE MOREIRA SANTOS

**CONTROLE DE UM PÊNULO INVERTIDO UTILIZANDO UM CONTROLADOR
PID**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: Cecílio Martins de Sousa Neto,
Prof. Dr.

PAU DOS FERROS

2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S789 Santos, Lizandra Meire.
c CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO UM
 CONTROLADOR PID / Lizandra Meire Santos. - 2020.
 38 f. : il.

 Orientador: Cecílio Martins de Sousa Neto .
 Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia de
Computação, 2020.

 1. Sistemas Instáveis. 2. Modelagem. 3.
 Pêndulo Invertido. 4. Controlador PID. I. ,
 Cecílio Martins de Sousa Neto, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

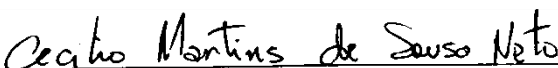
LIZANDRA MEIRE MOREIRA SANTOS

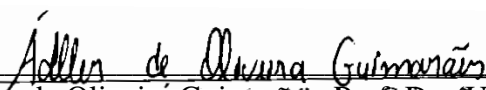
**CONTROLE DE UM PÊNULO INVERTIDO UTILIZANDO UM CONTROLADOR
PID**

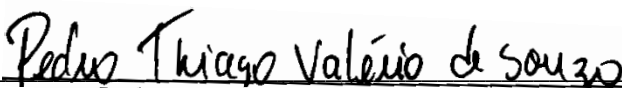
Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Computação.

Defendida em: 07/02/2020.

BANCA EXAMINADORA


Cecilio Martins de Sousa Neto, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente


Adler de Oliveira Guimarães, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador


Pedro Thiago Valério de Souza, Prof. Msc. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

A minha eterna gratidão a Deus por sempre me abençoar com inúmeras conquistas.

Ao professor, orientador e porque não falar amigo, Dr. Cecilio Martins de Sousa Neto pela dedicação a este trabalho. Agradeço pela disponibilidade em me deixar ser sua orientanda e pelo acolhimento em sua sala sempre que chegava pessimista. Mesmo sobrecarregado de tarefas acadêmicas, dispôs de muito empenho em relação à construção desta monografia (deixando-a do jeito que eu esperava), pelas prosas que de certa forma contribuíram para evitar minha desistência do curso. Foi uma grande satisfação receber de ti ensinamentos que levarei pra toda vida, pois me mostrou que ainda há professores que se importam com o aprendizado e bem estar de seus alunos.

Deixo aqui também meu obrigado aos demais professores que marcaram minha vida acadêmica cada qual com seu jeito de transmitir o que sabe.

Aos meus pais (Lucicleide e Ivani), agradeço pelo amor despejado sem medidas em minha pessoa, pela qualidade educativa em que cresci, educação na qual contribuiu para minha formação pessoal e profissional, obrigada pela confiança em mim depositada; Ao meu esposo (Enio), que sempre me incentivou na continuação dos estudos, incentivo este essencial em minha formação

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para conclusão deste trabalho, amigos, familiares e afins.

“Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana.”

(Carl G. Jung)

RESUMO

No nosso meio percebemos que a maioria dos sistemas são instáveis, como por exemplo, o controle de posição de veículos espaciais na fase de lançamento e o controle da postura ereta natural dos seres bípedes, isto remete a ideia de um pêndulo invertido, utilizado em diferentes sistemas físicos, com isso os avanços obtidos na análise de seu modelo matemático podem ser aplicados a outros sistemas. Este trabalho consiste em simulações, no Matlab/Simulink, do sistema de um pêndulo invertido, objetivando a aplicação dos conceitos estudados durante o curso de Engenharia de Computação, voltado principalmente para a área de controle de sistemas. A metodologia compreendeu o estudo bibliográfico dos sistemas de pêndulos, a modelagem matemática do pêndulo invertido, projeto de um controlador PID e a simulação em malha fechada no Matlab/Simulink para projetar um controlador com a finalidade de equilibrar a haste do pêndulo na posição vertical em um carrinho em movimento. No final, análises e comparações são feitas quando aplicada diferentes tipos de perturbações e os resultados obtidos se mostram satisfatórios indicando a potencialidade prática da proposta do trabalho.

Palavras chaves: Sistemas Instáveis, Modelagem, Pêndulo invertido, Controlador PID.

ABSTRACT

In our midst we realized that most systems are unstable, such as, for example, the position control of space vehicles in the launch phase (Ogata, 2003) and the control of the natural upright posture of biped beings (Naves, 2006), this refers the idea of an inverted pendulum, used in different physical systems, with that the advances obtained in the analysis of its mathematical model can be applied to other systems. This work consists of simulations, in Matlab / Simulink, of the system of an inverted pendulum, aiming at the application of the concepts studied during the Computer Engineering course, mainly focused on the area of systems control. The methodology included the bibliographic study of pendulum systems, mathematical modeling of the inverted pendulum, design of a PID controller and closed-loop simulation in Matlab / Simulink to design a controller in order to balance the pendulum rod in a vertical position on a moving cart. In the end, analyzes and comparisons are made and the results obtained are satisfactory, indicating the practical potential of the work proposal.

Keywords: Unstable systems, Modeling, Inverted pendulum, PID controller.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Respostas transitórias do sistema pêndulo invertido após atuação de um controlador PID com 2 modelos diferentes.....	14
Figura 2 - Resultados reais no tempo da posição angular do pêndulo com a vertical para o controlador PID com parâmetros experimentais (a); Ação de controle no tempo para o PID (b).	15
Figura 3 - Resultado da simulação com controlador PID de distúrbios externos aplicados ao sistema: (a) Impulso; (b) Degrau.	16
Figura 4 - (a) Deslocamento do carro sob ação do controlador fuzzy; (b)Ação de controle do Controlador por Modo Deslizante Linear.....	17
Figura 5 - Comparação das saídas nas simulações com e sem a realimentação linearizante. ..	18
Figura 6 - Pêndulo Simples.	19
Figura 7 - Coordenadas do sistema pêndulo convencional.	21
Figura 8 - Sistema de coordenadas do conjunto do pêndulo invertido.....	24
Figura 9 - Diagrama de blocos sem controle.....	27
Figura 10 - Simulação sem controle	28
Figura 11 - Lugar Geométrico das Raízes sem controle e com controle.....	29
Figura 12 - Controle por realimentação de saída.....	30
Figura 13 - Diagrama de blocos da simulação do sistema real.	32
Figura 14 - Interface de representação do carro-pêndulo.....	33
Figura 15 - Aplicação de um pulso na entrada.	33
Figura 16 - Resultado da simulação de um distúrbio externo aplicado ao sistema.	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores numéricos para os parâmetros físicos do pêndulo invertido tomando cor base os valores de RIBEIRO (2007).	27
---	----

Sumário

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Objetivos	13
1.2 Organização do Texto	13
2 ESTADO DA ARTE	14
3 MODELAGEM DO SISTEMA	19
3.1 Modelagem do Pêndulo Invertido.....	24
3.1.1 Função de Transferência	24
3.2 Parâmetros	26
3.3 Simulação Sem Controle.....	27
3.3.1 Resposta do Sistema	28
3.4 Simulação do Sistema Com Controle	30
4 RESULTADOS	31
5 CONCLUSÃO	35
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	36

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da microeletrônica e da eletrônica de potencia possibilitou a implementação e análise de sistemas de controle cada vez mais complexos. O estudo do controle do pêndulo invertido é utilizado em diferentes sistemas físicos, pois os avanços obtidos na análise de seu modelo matemático podem ser aplicados a outros sistemas de controle (SILVA, 2013), como exemplo, a implementação do controle da oscilação de arranha-céus e modelos biomecânicos baseados no modo de caminhar dos seres humanos, que trazem vantajosas ideias em áreas como esportes, fabricação de calçados, robótica, etc. e a posição ereta estável de um ser humano ao caminhar se aproxima muito de um pêndulo invertido pivotado em suas articulações (RIBEIRO, 2007).

De acordo com COSTA, LIRA e SILVA (2012), através da simulação de sistemas de pêndulo simples e invertidos pode-se fazer controle de processos em malha aberta, pois a modelagem matemática traz parâmetros semelhantes para diversos sistemas de instabilidade.

Do ponto de vista construtivo, um pêndulo invertido é formado por uma barra cilíndrica, geralmente metálica, a qual é livre para movimentar em torno de um ponto fixo, sendo este ponto fixo montado em um carro com deslocamento de forma livre na direção horizontal. Nessa base pode haver uma força variável no deslocamento do mesmo. Dessa forma, a haste posicionada em cima da base tende a cair naturalmente, pois sua posição vertical é uma condição de equilíbrio instável. Nestas condições, se faz necessário realizar o controle em malha fechada para promover uma máxima estabilidade da haste do pêndulo na posição vertical, sendo possível contrabalançar a dinâmica natural do pêndulo. A intensidade da força pode ser controlada a partir da informação da posição angular da haste (RIBEIRO, 2007).

Para garantir que a haste permaneça em equilíbrio na posição vertical, ou seja estável, se faz necessário o uso de uma estrutura de controle, geralmente utilizando a posição angular como sinal de referência. Em geral, quando se quer controlar a posição de sistemas instáveis, geralmente toma-se como base o pêndulo invertido devido a seu sistema mecânico. Trazendo esta teoria para a prática, tem-se como exemplos reais: o controle de posição de veículos espaciais na fase de lançamento (OGATA, 2003) e o controle da postura ereta natural dos seres bípedes (NAVES, 2006) dentre vários outros. Nesse sentido, o objetivo do controle é fazer com que o pêndulo nunca desequilibre ficando sempre na posição sentido norte, mesmo que sejam provocadas perturbações ao mesmo (SILVA e ANTUNES, 2010).

Com base no problema oscilatório do pendulo invertido relacionando a área de sistemas de controle e automação, é apresentado neste trabalho uma análise de controle, por meio do controlador proporcional integral e derivativo (PID), aplicada na estabilização de uma sistema carro-pendulo invertido.

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é apresentar o controle de um pendulo invertido por meio de um controlador PID.

Os objetivos específicos são:

- Desenvolver a modelagem matemática de um pêndulo invertido;
- Projetar um controlador PID para o controle de um pêndulo invertido;
- Implementar um sistema de controle de um pêndulo invertido em *hardware*.

1.2 Organização do Texto

Sendo assim, os capítulos seguintes tratarão de detalhes relacionados aos aspectos necessários para compreender e desenvolver o trabalho.

No Capítulo 2 é apresentado o estado da arte referente aos esquemas de controle do pêndulo invertido.

No Capítulo 3, é realizado a modelagem matemática e análise de controle do sistema.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos por meio de simulação.

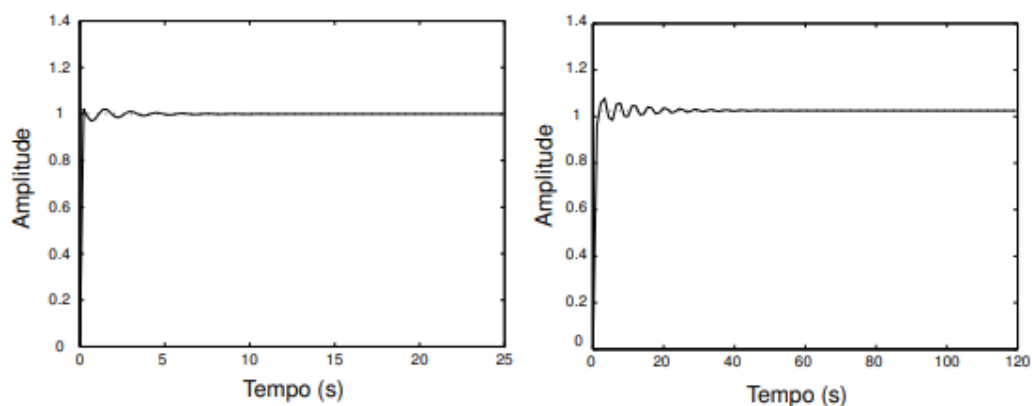
No Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais do trabalho.

2 ESTADO DA ARTE

Nas últimas décadas diversas técnicas de controle foram utilizadas na estabilização de um pêndulo invertido sobre um carro. Em geral, a maioria dos trabalhos procura resolver dois problemas: estabilização dos pêndulos na posição vertical e controle de balanço dos pêndulos na posição vertical. Em geral, as técnicas de controle baseiam-se no modelo linear do sistema, ou seja, com o sistema operando em posições próximas a vertical (BOGDANOV, 2004).

Começando os estudos sobre o pêndulo invertido, pode-se mencionar a monografia de TEIXEIRA, SODRÉ e JUNIOR (2006), que apresentou um estudo comparativo sobre algumas modelagens matemáticas sobre o problema clássico do pêndulo invertido, realizando a simulação com Funções de Transferências (FT's) e Espaço de Estado, fornecidas pela literatura, além de desenvolverem outros dois modelos. Utilizaram o Matlab® como ferramenta de simulação para observar os diversos comportamentos das FT's feitas para as modelagens, assim como de seus controladores projetados em Malha Aberta (MA) e Malha Fechada (MF). Ressaltando que foram usados dois controladores, PD (Proporcional e Derivativo) e PID (Proporcional, Integrativo e Derivativo). A Figura 1 representa a resposta do sistema com o controlador PID.

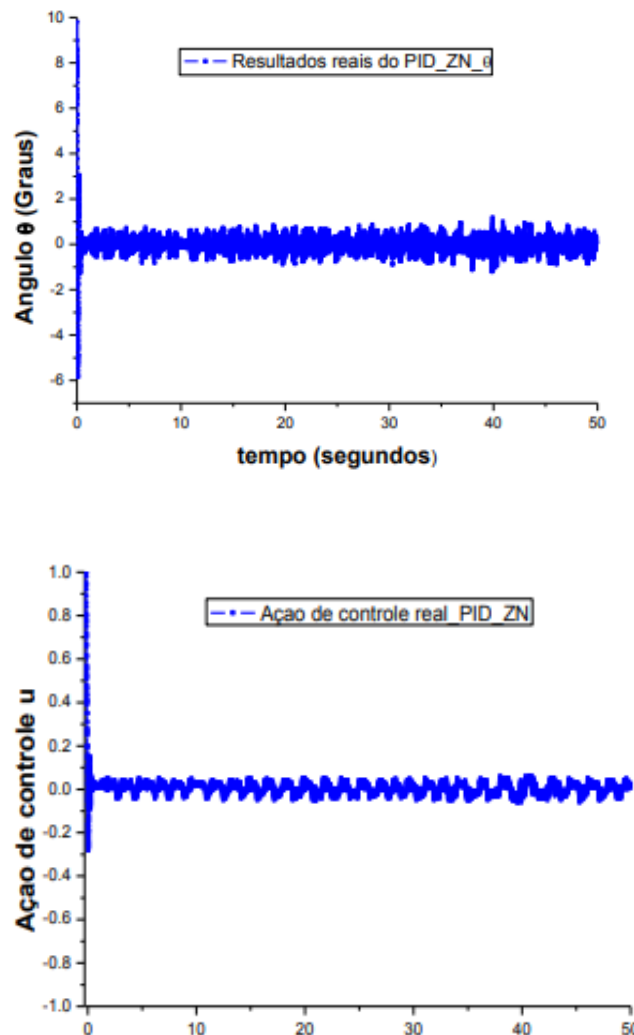
Figura 1 - Respostas transitórias do sistema pêndulo invertido após atuação de um controlador PID com 2 modelos diferentes.



Fonte: TEIXEIRA, SODRÉ e JUNIOR (2006).

SILVA (2017) fez uso do controlador PID através do método do lugar das raízes e outras técnicas para projetar um novo veículo de duas rodas e assim exercer as técnicas de controle com o uso também do controlador *Fuzzy*. Foi feita a modelagem do motor, do pêndulo. O estudo foi também realizado através da simulação no *software* Matlab. A Figura 2 mostra alguns dos resultados obtidos com o projeto do controlador PID.

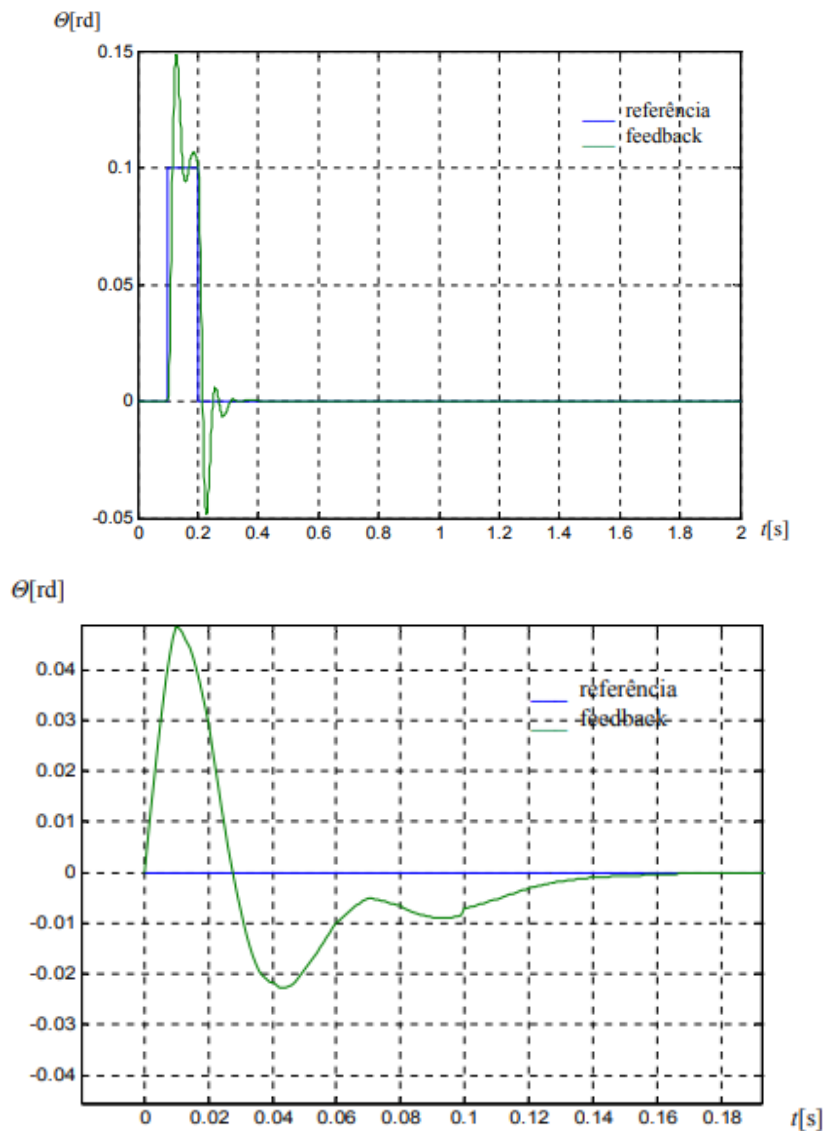
Figura 2 - Resultados reais no tempo da posição angular do pêndulo com a vertical para o controlador PID com parâmetros experimentais (a); Ação de controle no tempo para o PID (b).



Fonte: SILVA (2017).

Como o controle de um pêndulo invertido é citado em muitos artigos, RIBEIRO (2007) utilizou de componentes de uma impressora matricial para desenvolver um sistema físico. Para a interface entre o computador e a instrumentação eletrônica do sistema foi empregada uma placa de aquisição de dados de baixo custo. Na modelagem do sistema desenvolvido e na etapa de sintonia da malha de controle resultante, foram empregados métodos semelhantes aos trabalhos citados anteriormente. Os resultados práticos obtidos foram bons, indicando a potencialidade prática da proposta do trabalho. Na Figura 3 podemos ver o comportamento deste sistema.

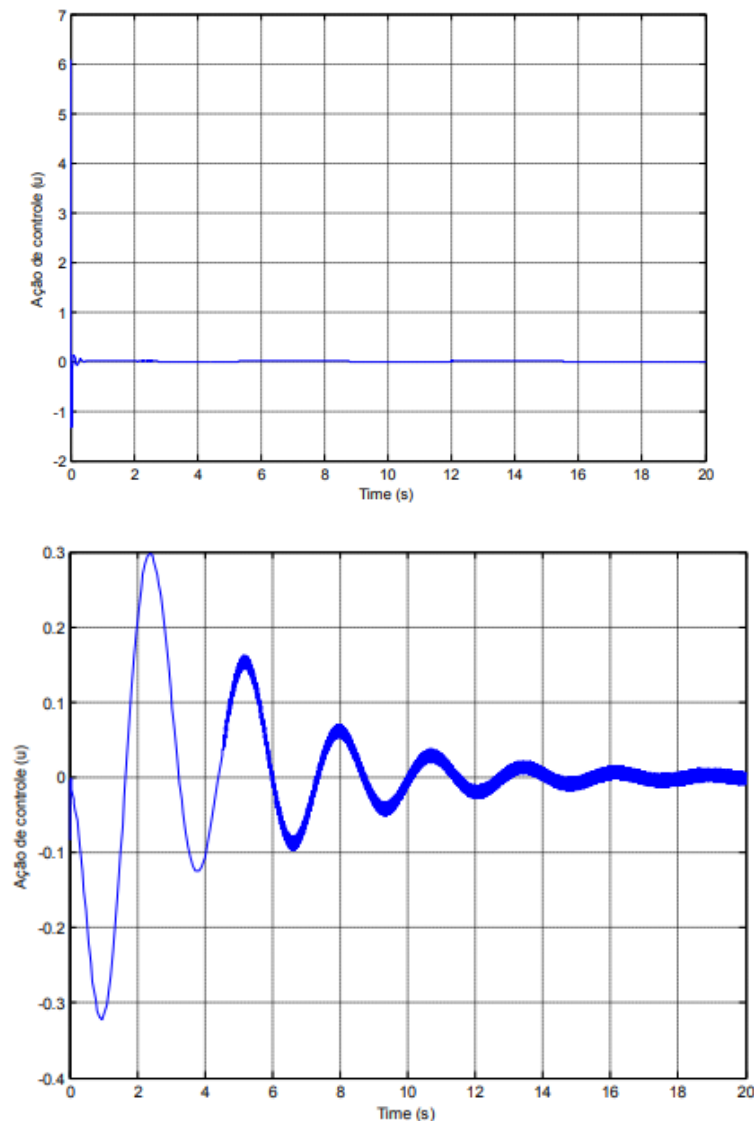
Figura 3 - Resultado da simulação com controlador PID de distúrbios externos aplicados ao sistema: (a) Impulso; (b) Degrau.



Fonte: RIBEIRO (2007).

DA SILVA (2010) apresentou um estudo baseado em tres técnicas de controle, sendo estas o regulador linear quadrático, controle por modo deslizante e lógica *fuzzy*. Para o controle por modo deslizante foi desenvolvido uma melhoria na função de chaveamento com o intuito de atenuar o *chattering*, por meio de uma função de saturação. Em relação ao regulador linear quadrático, o controlador baseado em *fuzzy* apresentou uma melhor aproximação das variáveis de estado do ponto de equilíbrio, no entanto sua resposta foi bastante lenta. Por outro lado, o controlador por modo deslizante apresentou uma resposta mais rápida. Na Figura 4 verificamos alguns resultados importantes deste trabalho.

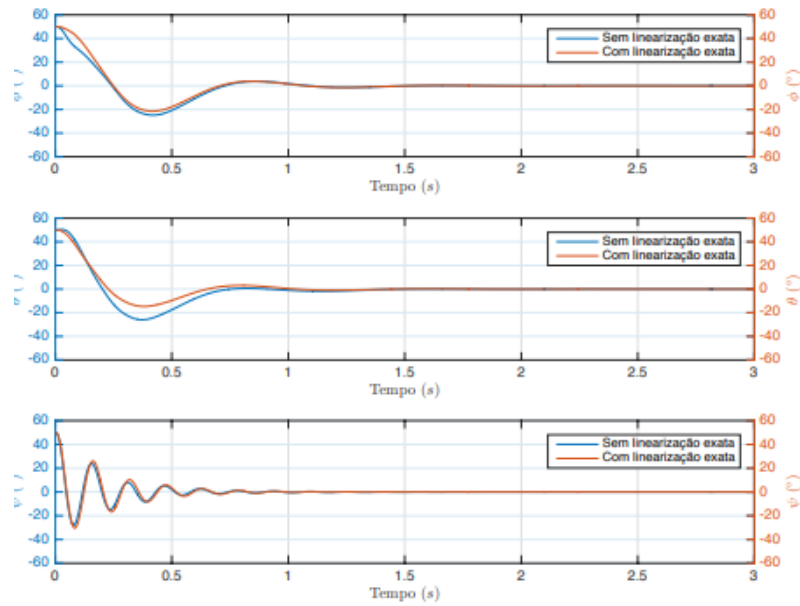
Figura 4 - (a) Deslocamento do carro sob ação do controlador fuzzy; (b) Ação de controle do Controlador por Modo Deslizante Linear.



Fonte: DA SILVA (2010).

Em BOBROW (2015) é apresentado um tipo diferente de pêndulo invertido controlado por rodas de reação, tendo como principal diferença a constituição do ponto de articulação que, neste caso consiste em uma junta esférica que permite ao pêndulo girar em torno de seus três eixos. Neste caso, foi elaborada uma modelagem do sistema por meio das equações de Euler-Lagrange, leis de Newton e de Kirchhoff. Para o controle do sistema, foram avaliadas duas técnicas de controle não linear: linearização padrão e linearização exata. A validação do sistema de controle foi realizada por meio de um estudo de simulação. E através da Figura 5 foram construídas as análises deste trabalho.

Figura 5 - Comparação das saídas nas simulações com e sem a realimentação linearizante.



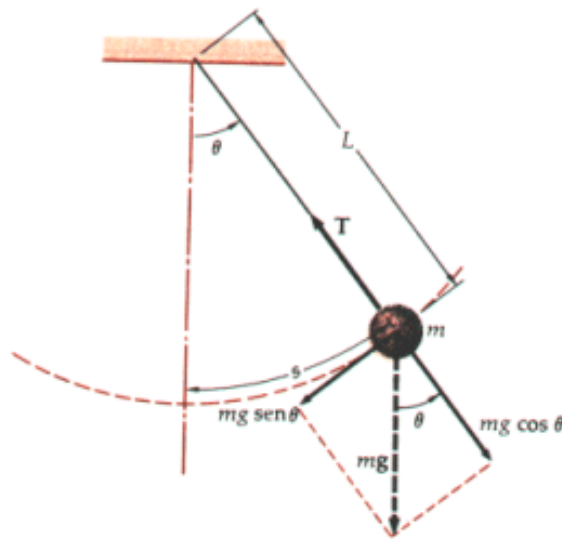
Fonte: BOBROW (2015).

Os trabalhos citados foram tomados como base de entendimento principalmente da modelagem matemática do pêndulo invertido e a construção do controlador.

3 MODELAGEM DO SISTEMA

Um pêndulo simples ou convencional ideal, representado na Figura 6, consiste de uma partícula suspensa por um fio inextensível e de massa desprezível. Quando afastado de sua posição de equilíbrio e solto, o pêndulo oscilará em um plano vertical sob a ação da gravidade, em um movimento periódico e oscilatório, sendo possível determinar o período do movimento resultante (RIBEIRO, 2007).

Figura 6 - Pêndulo Simples.



Fonte: Física UFPB.

Na Figura 1, as variáveis descritas são tais que:

- L – o comprimento do pêndulo;
- m – a massa da partícula;
- θ – o ângulo do fio com a vertical.
- g – gravidade.

Realizando a distribuição das forças, tem-se que as atuantes em m são o peso (mg) e a tração da corda (T). O movimento oscilatório do sistema será em torno de um arco de círculo de raio L . A componente da força peso mg pode ser decomposta em uma componente radial de módulo igual a $mg \cos \theta$ e uma componente tangencial igual a $mg \sin \theta$. A componente radial da resultante é a força centrípeta que mantém a partícula na trajetória circular. A componente tangencial é a força restauradora (responsável por fazer com que m retorne a posição de equilíbrio), onde uma força F se opõe ao aumento de θ . A força restauradora não é

proporcional ao deslocamento angular θ , mas sim a $\text{sen}\theta$. O movimento, portanto, não é harmônico simples. Entretanto, se o ângulo θ for suficientemente pequeno a função $\text{sen}\theta$ será aproximadamente igual a θ , e o deslocamento ao longo do arco será $x = L\theta$. Assim obtém-se a Equação (1) (RIBEIRO, 2007).

$$F = -mg\theta = -mg\left(\frac{x}{L}\right) = -\left(m\frac{g}{L}\right)x. \quad (1)$$

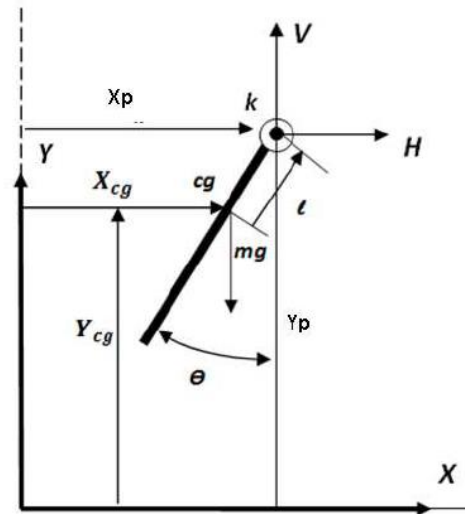
Para pequenos deslocamentos, a força restauradora é proporcional ao deslocamento e tem o sentido oposto ao mesmo. Esta é exatamente a condição para obter o movimento harmônico simples fazendo com que a Equação (1) tenha a mesma forma que a equação $F=-kx$, com $\frac{mg}{L}$ representando a constante k . Para pequenas amplitudes o período T' (tempo de um ciclo) de um pêndulo obtém-se na Equação (2). O período T' independe da massa m da partícula suspensa. Essa característica serviu com base para a construção dos primeiros relógios mecânicos, onde mecanismos com molas mantinham e ajustavam as oscilações de pêndulos para medições de tempo (RIBEIRO, 2007).

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}}, \quad (2)$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Estuda-se o modelo do pêndulo convencional, como recurso matemático para levantar os parâmetros utilizados no pêndulo invertido. Por isso será demonstrado a seguir o modelo matemático do pêndulo simples de acordo com a Figura 7.

Figura 7 - Coordenadas do sistema pêndulo convencional.



Fonte: SILVA (2013).

As grandezas presentes no sistema segundo RIBEIRO (2007) são:

- H – Força no eixo horizontal;
- V – Força no eixo vertical;
- mg – A força peso da haste do pêndulo;
- l – A metade do comprimento da haste;
- X_p – Deslocamento na horizontal até a base do pêndulo;
- Y_p – Deslocamento na vertical até a base do pêndulo;
- X_{cg} – Deslocamento na horizontal até ao centro de gravidade;
- Y_{cg} – Deslocamento na vertical até ao centro de gravidade.

Conforme mostrado na Figura 7, são montadas as equações que regem o movimento no eixo horizontal e vertical. As derivadas que aparecem no desenvolvimento matemático representam as informações de velocidade e aceleração (SILVA, 2013). Dada à descrição das variáveis, pode-se agora fazer os seguintes cálculos (RIBEIRO, 2007):

As equações na horizontal:

$$X_{cg} = X_p - l \sin(\theta). \quad (3)$$

Derivando-se (3), tem-se a equação de velocidade:

$$\dot{X}_{cg} = \dot{X}_p - l \cos(\theta) \dot{\theta}. \quad (4)$$

Derivando-se novamente a Equação (4), tem-se a equação da aceleração:

$$\ddot{X}_{cg} = -l\cos(\theta)\ddot{\theta} + l\sin(\theta)\dot{\theta}^2. \quad (5)$$

Semelhante ao procedimento anterior obtém-se as equações na vertical:

$$\begin{aligned} Y_{cg} &= Y_p - l\cos(\theta), \\ \dot{Y}_{cg} &= \dot{Y}_p + l\sin(\theta)\dot{\theta}, \dot{Y}_p = 0, \\ \ddot{Y}_{cg} &= l\sin(\theta)\ddot{\theta} + l\cos(\theta)\dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Fazendo a somatória das forças na direção X pela fórmula:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m\ddot{X}_{cg}, \\ H &= m[-l\cos(\theta)\ddot{\theta} + l\sin(\theta)\dot{\theta}^2], \\ H &= -ml\cos(\theta)\ddot{\theta} + ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

E para a somatória das forças na direção Y temos a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m\ddot{Y}_{cg}, \\ V - mg &= m[l\sin(\theta)\ddot{\theta} + l\cos(\theta)\dot{\theta}^2], \\ V &= ml\sin(\theta)\ddot{\theta} + ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + mg. \end{aligned} \quad (8)$$

A fórmula pela qual se obtém o momento de inércia é obtida a seguir:

$$\begin{aligned} \sum M_{cg} &= I\ddot{\theta}, \\ Vl\sin(\theta) + Hl\cos(\theta) &= I\ddot{\theta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Fazendo as combinações das Equações (7) e (8) tem-se:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= -Vl\sin(\theta) + Hl\cos(\theta), \\ I\ddot{\theta} &= -[ml\sin(\theta)\ddot{\theta} + ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + mg]l\sin(\theta) + [-ml\cos(\theta)\ddot{\theta} + \end{aligned} \quad (10)$$

$$ml\text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2]l\text{cos}(\theta).$$

Desenvolvendo a Equação (10)

$$I\ddot{\theta} = -ml^2\text{sen}^2(\theta)\ddot{\theta} - ml^2\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta)\dot{\theta}^2 - mgl\text{sen}(\theta) - ml^2\text{cos}^2(\theta)\ddot{\theta} + ml^2\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta)\dot{\theta}^2. \quad (11)$$

Aplicando a relação trigonométrica $\text{sen}^2(\theta)+\text{cos}^2(\theta) = 1$ e simplificando, tem-se:

$$I\ddot{\theta} = -ml^2\ddot{\theta} - mgl\text{sen}(\theta),$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\text{sen}(\theta) = 0. \quad (12)$$

Considerando a haste uniforme, com momento de inércia $\frac{ml^2}{3}$, e que θ é pequeno o suficiente para admitir que $\text{sen}(\theta) = \theta$, tem-se:

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}(t) + mgl\text{sen}\theta(t) = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{4l}\theta = 0. \quad (13)$$

Definindo os parâmetros da Equação (14) tem-se a Equação (15) que é a Equação do pêndulo convencional, cujos autovalores são dados por (16).

$$\omega_n^2 = \frac{3g}{4l^2}. \quad (14)$$

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_n^2\theta(t) = 0. \quad (15)$$

$$\lambda = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (16)$$

Fazendo $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}$ obtém-se a solução dada pela Equação (17). Em geral $\theta(t)$ apresenta uma resposta senoidal de frequência $(\omega_d/2\pi)$ amortecida com um envelope exponencial ($e^{-\xi\omega_n t}$).

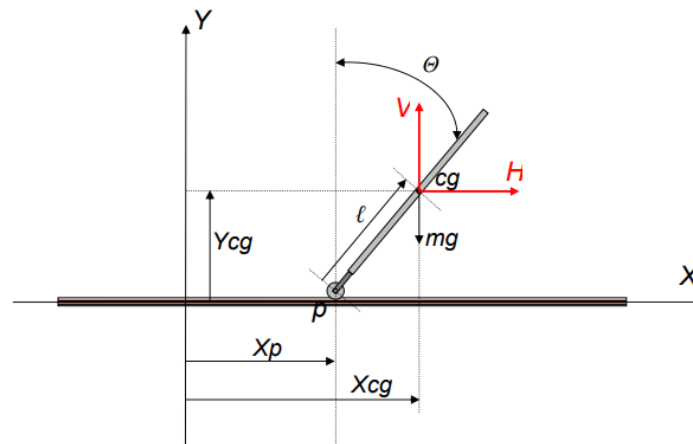
$$\theta(t) = Ke^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d(t) + a). \quad (17)$$

3.1 Modelagem do Pêndulo Invertido

O pêndulo invertido é considerado um sistema instável e complexo, portanto de modelo matemático de grande importância para o estudo de muitos outros mecanismos com sistemas semelhantes, por isso vários pesquisadores já abordaram este sistema de diversas maneiras diferentes (RIBEIRO, 2007).

Como exemplo tem-se a Figura 8 que servirá como base para realização dos cálculos das forças atuantes neste modelo de pêndulo por meio das relações trigonométricas.

Figura 8 - Sistema de coordenadas do conjunto do pêndulo invertido.



Fonte: RIBEIRO (2007).

De forma análoga ao pêndulo convencional, obtém-se as equações na horizontal e na vertical para se saber como se dá o movimento do centro de gravidade da haste, de acordo com a posição instantânea da base e o ângulo de inclinação da haste (PRADO, 2011).

3.1.1 Função de Transferência

Com base na decomposição das forças que atuam na horizontal:

$$X_{cg} = X_p + l \text{sen}(\theta),$$

$$\dot{X}_{cg} = \dot{X}_p + l \text{cos}(\theta) \dot{\theta},$$

$$\ddot{X}_{cg} = \ddot{X}_p + l \text{cos}(\theta) \ddot{\theta} - l \text{sen}(\theta) \dot{\theta}^2. \quad (18)$$

Na vertical:

$$\begin{aligned}
 Y_{cg} &= Y_p + l\cos(\theta), \\
 \dot{Y}_{cg} &= \dot{Y}_p - l\sin(\theta)\dot{\theta}, \dot{Y}_p = 0, \\
 \ddot{Y}_{cg} &= -l\sin(\theta)\ddot{\theta} - l\cos(\theta)\dot{\theta}^2.
 \end{aligned} \tag{19}$$

A somatória das forças na direção X , denominada como H é dada por (20).

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= m\ddot{X}_{cg}, \\
 H &= m[\ddot{X}_p + l\cos(\theta)\ddot{\theta} - l\sin(\theta)\dot{\theta}^2], \\
 H &= m\ddot{X}_p + ml\cos(\theta)\ddot{\theta} - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2.
 \end{aligned} \tag{20}$$

A somatória das forças na direção Y , denominada como V é expressa por (21).

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= m\ddot{Y}_{cg}, \\
 V - mg &= m[-l\sin(\theta)\ddot{\theta} - l\cos(\theta)\dot{\theta}^2], \\
 V &= -ml\sin(\theta)\ddot{\theta} - ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + mg.
 \end{aligned} \tag{21}$$

A somatória dos momentos de inércia é modelada por:

$$\begin{aligned}
 \sum M_{cg} &= I\ddot{\theta}, \\
 Vl\sin(\theta) - Hl\cos(\theta) &= I\ddot{\theta}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Substituindo as Equações (20) e (21) em (22), tem-se:

$$\begin{aligned}
 I\ddot{\theta} &= [-ml\sin(\theta)\ddot{\theta} - ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + mg]l\sin(\theta) \\
 &\quad - [m\ddot{X}_p + ml\cos(\theta)\ddot{\theta} - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2]l\cos(\theta), \\
 I\ddot{\theta} &= -ml^2\sin^2(\theta)\ddot{\theta} - ml^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + mgl\sin(\theta) - ml\ddot{X}_p\cos(\theta) \\
 &\quad - ml^2\cos^2(\theta)\ddot{\theta} + ml^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Da Equação (23) obtém-se:

$$I\ddot{\theta} = -ml^2\ddot{\theta} + mgl\text{sen}(\theta) - ml\ddot{X}_P \cos(\theta),$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\text{sen}(\theta) = -ml\ddot{X}_P \cos(\theta). \quad (24)$$

Supondo que o momento de inércia seja desprezível ($I \approx 0$) e considerando θ muito pequeno, tal que $\text{sen}(\theta) = \theta$ e $\text{cos}(\theta) = 1$, tem-se:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) - mgl\theta(t) = -ml\ddot{X}_P(t). \quad (25)$$

Dividindo todos os termos por ml^2 e definindo os parâmetros da Equação (25), visando a obtenção de uma representação padrão, obtém-se a Equação (26), onde aplicando a transformada de Laplace resulta em (27) que é a função de transferência típica de um sistema de pêndulo invertido.

$$\ddot{\theta}(t) - \frac{g}{l}\theta(t) = -\frac{\ddot{X}_P}{l}. \quad (26)$$

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{-\frac{s^2}{l}}{s^2 - \frac{g}{l}}. \quad (27)$$

3.2 Parâmetros físicos do pêndulo invertido

Os modelos matemáticos quantitativos são importantes para o estudo do controle dos sistemas complexos, tanto para compreender como para implementar o controle. Para tanto é necessário analisar as relações entre as variáveis do sistema e obter um modelo matemático que represente o sistema, e que seja o mais preciso possível. A modelagem matemática do sistema pêndulo invertido é fundamental para se obter as equações dinâmicas que regem o movimento, com equações mais próximas possíveis da realidade do sistema. Para se obter o modelo matemático que representa o sistema, é necessário utilizar equações diferenciais que regem o movimento, na qual são empregadas as leis da física, que descrevem o sistema não linear equivalente, de forma a obter um conjunto de equações diferenciais não-lineares. A partir dessas é aplicada a transformada de Laplace para simplificar a representação e os métodos de solução, considerando as condições iniciais nulas (SILVA, 2013).

Retomando os modelos obtidos na seção anterior com a função de transferência para o pêndulo invertido, pode-se atribuir valores numéricos para os parâmetros físicos, os quais foram extraídos do artigo de RIBEIRO (2007). A Tabela 1 apresenta os valores para os parâmetros utilizados no processo de modelagem matemática.

Tabela 1 - Valores numéricos para os parâmetros físicos do pêndulo invertido tomando como base os valores de RIBEIRO (2007).

Símbolos	Descrição	Valores	Unidades
l	Comprimento da haste	0,5	m
g	Aceleração da gravidade	10	m/s ²

Como sabemos os valores dos parâmetros, pode-se facilmente descobrir ω_n e K_p através da Equação (26) e do comprimento da haste tem-se o parâmetro $K_p = 2,97$. A função de transferência para o conjunto do pêndulo pode agora então ser completamente definida. Com esses dados podemos agora substituir as variáveis na Equação (28), só que inserindo agora a influência do carro sobre o pêndulo. Logo temos:

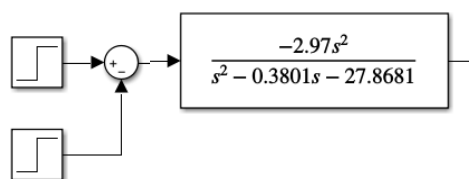
$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{-K_p s^2}{s^2 + 2\omega_n s - \omega_n^2} \quad (28)$$

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{-2,97s^2}{s^2 + 0,3801s - 27,8678}$$

3.3 Simulação Sem Controle

A simulação foi realizada no Simulink por meio do diagrama de blocos apresentado na a Figura 9.

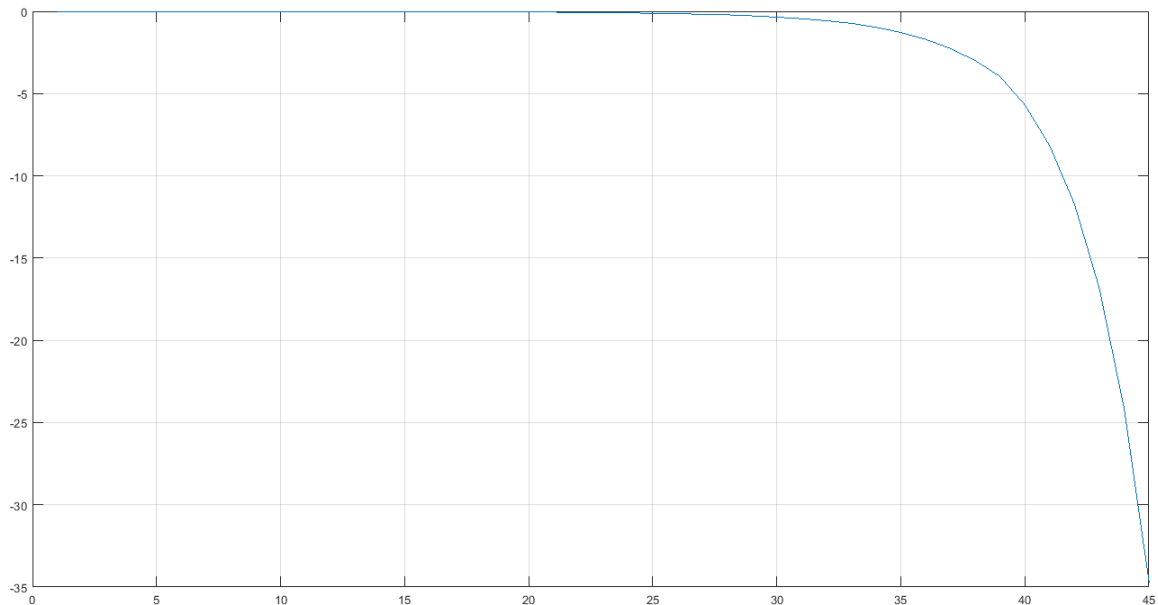
Figura 9 - Diagrama de blocos sem controle.



Fonte: Autor próprio.

Neste caso, obteve-se uma resposta instável conforme podemos ver o resultado na Figura 10.

Figura 10 - Simulação sem controle



Fonte: Autor próprio.

3.3.1 Resposta do Sistema

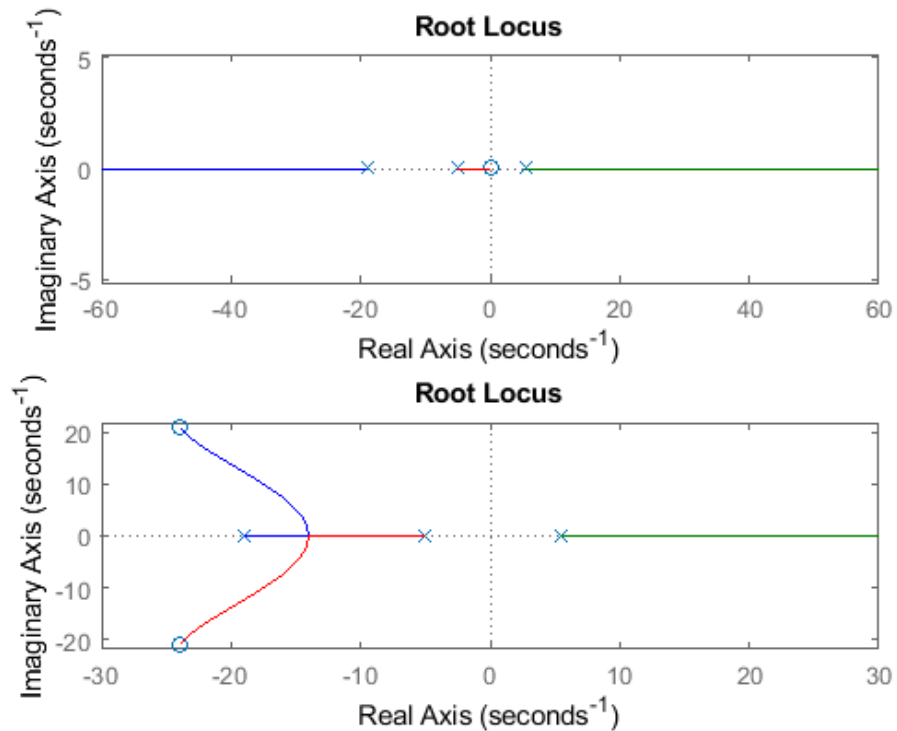
As especificações definidas para a malha de controle são: máximo pico (M_p) menor ou igual a 5%; tempo de acomodação (T_s em 2%) em torno de 0,2 segundos e erro em regime permanente (e_∞) próximo de 0,5%.

O método do lugar das raízes determina a localização de todos os pólos da malha fechada a partir do conhecimento da localização dos pólos e zeros, a malha aberta à medida que o valor de um parâmetro é variado de zero ao infinito (OGATA, 2011). Ou seja, o lugar das raízes inicia nos pólos de malha aberta, quando o ganho é zero, e termina nos zeros de malha aberta ou no infinito, quando o ganho tende ao infinito (SILVA, 2013).

Além disso, para que o sistema seja estável, todos os pólos contidos no gráfico do lugar das raízes para um determinado ganho devem estar localizados no semi-plano esquerdo de s , portanto, devem possuir a parte real negativa. Se o lugar das raízes cruzar para o lado direito do plano s , é possível conhecer os pontos nos quais ocorre a interseção do lugar das raízes com o eixo imaginário utilizando o critério de Routh-Hurwitz. A localização das raízes no plano s indica, em muitos casos, parâmetros como o tempo de pico da resposta, tempo de acomodação e o amortecimento do sistema em questão (SILVA, 2013).

A Figura 11 ilustra o resultado do Lugar Geométrico das Raízes na imagem (a) para o sistema do pêndulo desenvolvido sem controle e a imagem (b) explana o resultado do LGR com controle.

Figura 11 - Lugar Geométrico das Raízes sem controle e com controle.



Fonte: Autor próprio.

O controlador é um dispositivo físico, implementável por *hardware* e/ou *software* com a função de garantir que variações nas entradas de um processo não interfiram, em demasia, no processo, ou seja, nas saídas do processo (TEIXEIRA, SODRÉ e JUNIOR, 2006).

O controlador utilizado neste trabalho será o PID. A escolha deste se deve ao tipo de sistema que se está desenvolvendo. Neste caso, a ação básica proporcional (P) é a rápida correção do erro; a ação integral (I) é a eliminação do erro estacionário; a ação diferencial (D) é a redução das oscilações.

Para projetar este controlador é necessário ter conhecimento do erro em regime permanente (e_{∞}), período de acomodação (T_s), tempo de subida (T_r), tempo de pico (T_p) e máximo sobressinal (M_p). A seguir serão apresentados os projetos dos controladores.

A Equação (29) mostra a função de transferência típica de um controlador PID. Os ganhos proporcional (K_p), integral (K_i) e derivativo (K_d) quando devidamente ajustados definem a dinâmica desejada para a malha de controle (RIBEIRO, 2007).

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d \quad (29)$$

Pela Equação (30) tem-se como descobrir o ξ , com o $M_p = 0,05$:

$$M_p = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (30)$$

$$\xi = 0,6901$$

Bem como pela Equação (31) temos como calcular ω_n fazendo $T_s=0,2s$:

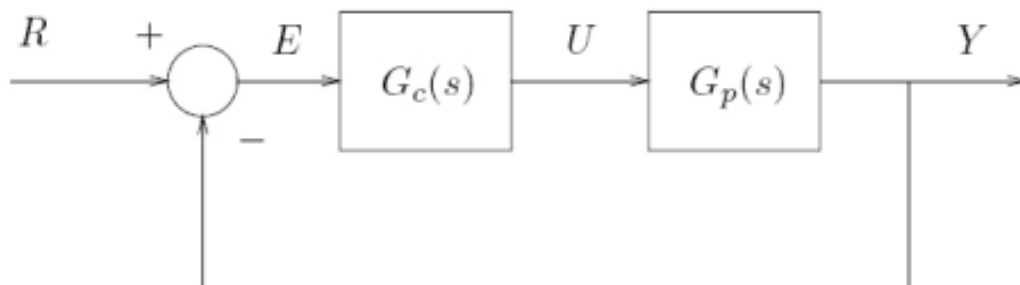
$$T_s(2\%) = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (31)$$

$$\omega_n = 29,98 \text{ rad/s}$$

3.4 Simulação do Sistema Com Controle

A estrutura básica do controlador funcionará como mostra a Figura 12, onde será aplicada a entrada o degrau (R), e as funções G_c e G_p representam respectivamente as funções transferências do controlador e da planta.

Figura 12 - Controle por realimentação de saída.



Fonte: Prof. Fernando J. Von Zuben.

4 RESULTADOS

Segundo RIBEIRO (2007) os parâmetros do modelo do conjunto amplificador-motor-carro podem ser obtidos por meio da resposta em frequência do sistema de pêndulo invertido. Feita a excitação do amplificador do sistema com um sinal senoidal e a análise no diagrama de Bode obtém-se a função transferência do conjunto, como segue:

$$G(s) = \frac{X_p(s)}{V_i(s)} = \frac{K_c}{s(s+B)} = \frac{3,85}{s(s+19)} \quad (32)$$

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_i(s)} = \frac{3,85}{s(s+19)} \cdot \frac{-2,97s^2}{(s-5,4725)(s+5,0924)} \quad (33)$$

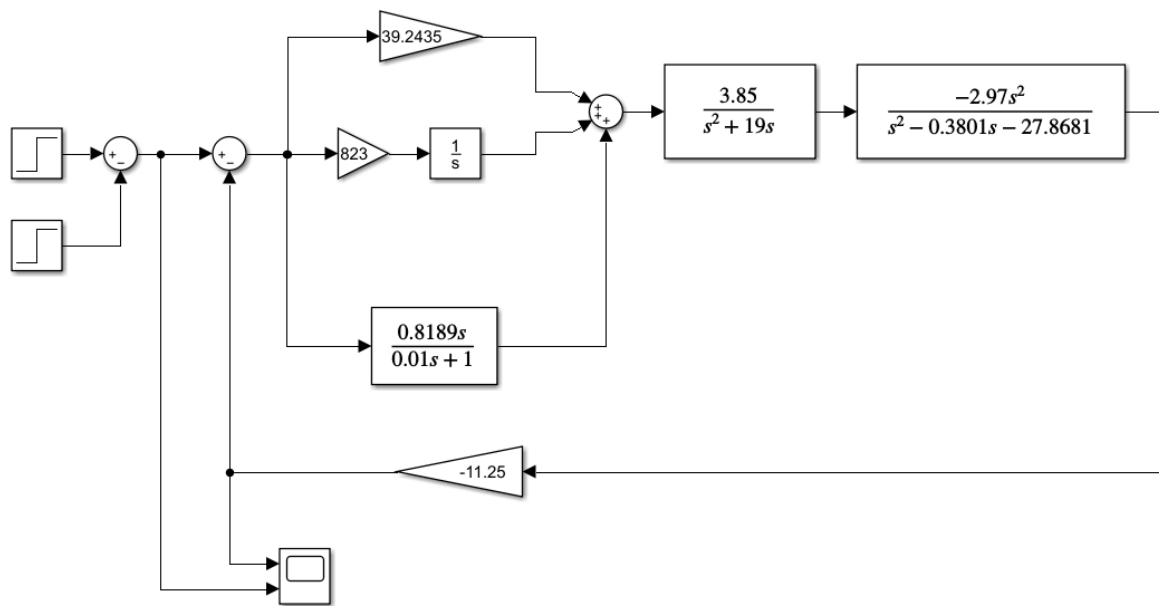
em que: B representa o amortecimento combinado do motor e do carro, V_i representa a tensão de entrada do amplificador e K_c representa a constante de amortecimento viscoso.

Depois de realizar a modelagem e estimado os parâmetros do sistema, pode-se realizar uma análise completa do comportamento dinâmico do sistema. Quando fatorada a FT da planta, podemos observar que existe um pólo no semiplano direito caracterizando um sistema instável (5,4725). Existe também um pólo na origem que tende a deixar o sistema instável.

Como o objetivo deste trabalho é implementar uma malha de controle para o sistema do pêndulo invertido se tornar um sistema estável, foi necessário utilizar o controlador PID. Foi determinado o valor do ganho integral $K_i = 823$. Para sistemas estáveis aproximados por funções de segunda ordem e com raízes expressas por (16), existe uma relação entre o máximo pico e o fator de amortecimento (ξ) dado pela Equação (30), e junto com a frequência natural de oscilação (ω_n) há uma relação também com o tempo de acomodação (Equação (31)). Daí obtemos $K_p = 39,2435$ e $K_d = 0,8189$ (RIBEIRO, 2007).

Na Figura 8 é apresentado o diagrama de blocos do sistema simulado no *software* Matab/Simulink. Baseado na Figura 13, o sistema é composto respectivamente por um controlador PID modificado, uma função de transferência do conjunto amplificador-carro e pela função de transferência do pêndulo invertido. O parâmetro Kf (de valor 0,01) representa o ganho do filtro, necessário para minimizar os eventuais ruídos que a parte derivativa pode produzir (RIBEIRO, 2007).

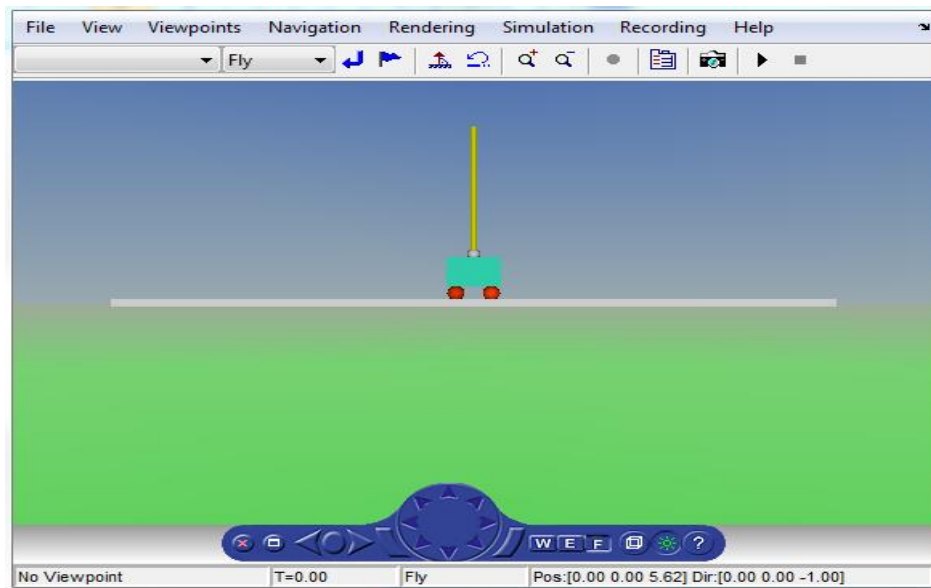
Figura 13 - Diagrama de blocos da simulação do sistema real.



Fonte: Autor próprio.

Para avaliar o desempenho do sistema foi desenvolvida uma representação em 3D do modelo carro-pêndulo, conforme ilustrado na Figura 14. Neste caso, foi utilizada a ferramenta VR Sink do Simulink, na qual foram configurados os seguintes parâmetros: rodinhas esquerda e direita (para que tivessem raios iguais), base do pendulo e a haste. O VR Sink possui duas entradas: uma referente a posição do carro e outra referente a posição angular do pêndulo.

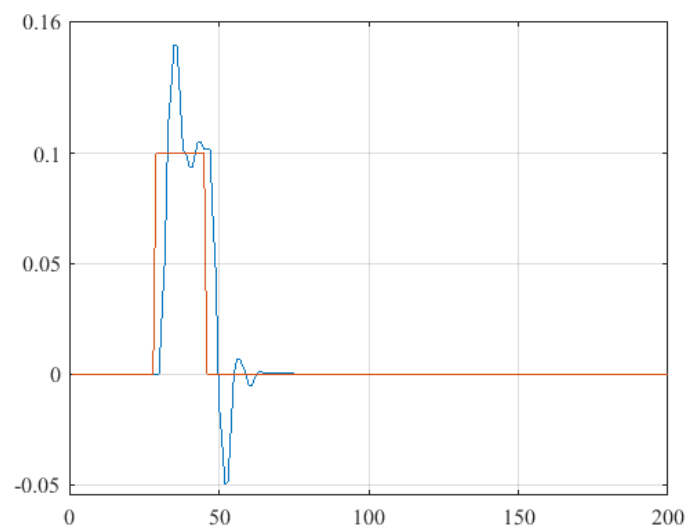
Figura 14 - Interface de representação do carro-pêndulo.



Fonte: Autor próprio.

Para avaliar a ação do controlador PID, foi definida um pulso de entrada para o sistema com o objetivo de verificar a estabilidade e dinâmica resultante, uma vez que a malha de controle tende fazer o sistema permanecer em uma condição de equilíbrio com erro angular aproximadamente nulo. Uma maneira de implementar uma avaliação consistente é aplicar um pulso de determinada duração no sistema e observar o comportamento do mesmo ao corrigir este desvio. Na Figura 15 é ilustrada a resposta obtida, no momento em que é aplicado o pulso na entrada de referência. Baseado na Figura 15, o controlador PID apresentou desempenho satisfatório, mantendo o pêndulo na posição vertical dentro da precisão estabelecida.

Figura 15 - Aplicação de um pulso na entrada.

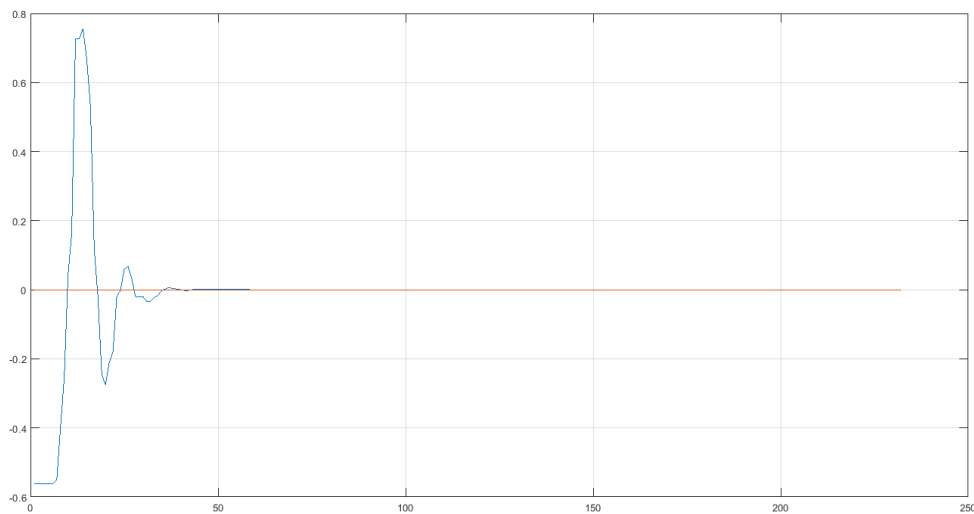


Fonte: Autor próprio.

Analisando o gráfico vemos que o máximo sobressinal foi de aproximadamente 14%.

Outra forma de testar a estabilidade do sistema é aplicando um distúrbio externo no sistema. Neste caso, foi aplicado um degrau como perturbação e, foi considerado que a haste do pêndulo estava em uma posição estável. Na Figura 16 é apresentado o comportamento do sistema mediante aplicação de uma perturbação, neste caso o controlador compensou o distúrbio e manteve o sistema estável.

Figura 16 - Resultado da simulação de um distúrbio externo aplicado ao sistema.



Fonte: Autor próprio.

Analisando o gráfico vemos que o máximo sobressinal foi de aproximadamente 7%.

5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi a construção de um pêndulo invertido em forma de simulação, e também o estudo da modelagem matemática e projeto de controladores, utilizando variáveis do sistema.

A malha de controle foi capaz de manter o pêndulo na posição vertical dentro da precisão estabelecida rejeitando adequadamente a perturbação inserida. A capacidade do sistema em compensar distúrbios externos também foi avaliada. A reação do sistema foi registrada e o resultado indicou que a malha de controle é capaz de compensar estes distúrbios.

Apesar do trabalho ter sido desenvolvido por simulações computacionais, pôde-se perceber que uma modelagem matemática criteriosa e a análise do comportamento dinâmico do modelo é de fundamental importância na etapa de implementação de um controlador em sistemas instáveis, podendo além de permitir respostas rápidas e precisas, reduzir custos de uma possível implementação em *hardware* para fins industriais, deixando como proposta para trabalhos e pesquisas futuras sua implementação real. Dessa forma, pretende-se que a aplicação prática contribua significativamente para a formação profissional do estudante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Rafael Gustavo. **Monografia De Graduação Em Engenharia De Controle E Automação.** Ouro Preto, 2018. Disponível em https://www.monografias.ufop.br/bitstream/35400000/1651/1/MONOGRAFIA_ControlP%C3%AAnduloInvertido.pdf. Acesso em 12 de setembro de 2019.

ANELVOI, Gabriela Pereira; SILVA, Paulo Sérgio da. Modelagem, Simulação e Controle de um Pêndulo Invertido. In: **XXVI Congresso de Iniciação Científica da Unesp.** Bauru, 2014.

BOBROW, FABIO. **Controle De Um Pêndulo Invertido Com 6 Graus De Liberdade E Rodas De Reação.** 2015. 121 p. Dissertação (Engenharia Elétrica) – Universidade de São Paulo.

BOGDANOV, Alexander. **Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart.** Technical Report CSE-04-006, pp. 1-14, December-2004.

CASTRUCCI, Plínio de Lauro; BITTAR, Anselmo; SALES, Roberto Moura. **Controle Automático.** Rio de Janeiro: LTC, 2011. 470 p.

COSTA, André Pereira da; LIRA, Valnir Vasconcelos; SILVA, Samuel Alves da. Simulações de Pêndulo Simples e Invertido. In: **VII Congresso Norte Nordeste de Pesquisa e Inovação.** Palmas: [s.n.], 2012. Disponível em: <http://propi.ifto.edu.br/ocs/index.php/connepi/vii/paper/viewFile/3877/2554>. Acesso em 23 de setembro de 2019.

DA SILVA, GISELE LIRA. **Controle E Estabilização Do Duplo Pêndulo Invertido Sobre Um Carro.** 2010. 102 p. Dissertação (Engenharia Elétrica) – Universidade Federal do Amazonas.

Fonte: Física UFPB. Disponível em: <http://www.fisica.ufpb.br/~mkkyotoku/texto/texto6.htm>. Acesso em 12 de setembro de 2019.

FORTULAN, Raphael Luiz Vicente. **Controle de um pêndulo invertido: SEL0382 – CONTROLE ROBUSTO.** São Paulo: [s.n.].

NAVES, Eduardo Lázaro Martins. **Modelagem e simulação do controle da postura ereta humana quasi-estática com reflexos neuromusculares,** Tese de Doutorado - Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia, 2006.

O., J. G. et al. **CONTROLE DE UM PÊNDBULO INVERTIDO: UMA PROPOSTA PARA MOTIVAÇÃO DE EQUIPES DISCENTES**. In: **XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**. Campina Grande: [s.n.], 2005. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/14/artigos/MG-5-06905125628-1119023833805.pdf>. Acesso em 12 de setembro de 2019.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**, 4a edn, Pearson Education do Brasil, 2003.

PEDROSO, Caio Cesar de Souza; MODESTO, Eduardo La Pastina. **Sistema De Controle De Pêndulo Invertido**. Curitiba, 2017. Disponível em: http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/9903/1/CT_COMET_2017_2_06.pdf. Acesso em 12 de setembro de 2019.

PRADO, Igor Ferreira do. **Construção E Controle Do Sistema Pêndulo Invertido**. Vitória da Conquista, 2011. Disponível em <https://physika.info/site/documents/Prado2011.pdf>. Acesso em 12 de setembro de 2019.

Prof. Fernando J. Von Zuben. **Introdução ao Controle por Realimentação**.

RIBEIRO, Ricardo. **Implementação De Um Sistema De Controle De Um Pêndulo Invertido**. 2007. 85 p. Dissertação (Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Itajubá. Disponível em: <https://saturno.unifei.edu.br/bim/0030714.pdf>. Acesso em 9 de setembro de 2019.

SILVA, Edilson Alfredo da. **Construção, Modelagem e Controle de um Pêndulo Invertido com CLP e Software SCADA**. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista (UNESP). Disponível em: https://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariaeletrica/pos-graduacao/edilson-alfredo-da-silva_final.pdf. Acesso em 9 de setembro de 2019.

SILVA, Elaine de M.; ANTUNES, Richard. **Controle de um Pêndulo Invertido**. Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <http://www.lee.uerj.br/~elaine/pend.pdf>. Acesso em 9 de setembro de 2019.

SILVA, Gustavo Diniz. **Projeto, Modelagem, Simulação, Construção E Controle De Um Veículo De Duas Rodas Pêndulo Invertido**. Uberlândia, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25442/3/ProjetoModelagemSimula%C3%A7%C3%A3o.pdf>. Acesso em 27 de setembro de 2019.

TEIXEIRA, Frederico Santos; SODRÉ, José Luis De Freitas; JUNIOR, Marcos Rangel. **O Sistema Dinâmico Pêndulo Invertido: Modelagem E Projeto De Controladores Por Simulação Computacional**. Campos dos Goytacazes, 2006. Disponível em: http://www.maxpezzin.com.br/aulas/7_EAC_Sistemas_Realimentados/MathLab_pendulo_invertido.pdf. Acesso em 27 de setembro de 2019.

VENDRAMINI, Gabriel; SILVA, Paulo S. da. **Controle De Um Pêndulo Invertido Sobre Uma Plataforma Móvel Descrevendo Trajetória Unidimensional Especificada**. Bauru, 2010. Disponível em: <https://fei.edu.br/sbai/SBAI2009/artigos/CONTROLE%20DE%20ROB%C3%94S%20I/55690.pdf>. Acesso em 12 de setembro de 2019.